Unificando teorias de cohomologia através de motivos

Sergio Maciel
Orientador: Olivier Martin

hoje, 2024

Topics

Topics

Estratificações de variedades

O espaço projetivo $\mathbb{P}^1$ possui uma decomposição na união disjunta de $\mathbb{A}^1$ e um ponto $\{\infty\}$. Já $\mathbb{P}^2$ pode ser decomposto como $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^2 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \{\infty\}$. Indutivamente, temos

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \{\infty\}.$$

Claro que isso não é especial do espaço projetivo, variedades algébricas possuem diversos tipos de estratificações como essa. O que é realmente interessante é a relação entre a cohomologia da variedade e a cohomologia dos estratos.

Cohomologia de $\mathbb{A}^n$ e de $\mathbb{P}^n$

Fixada uma teoria de cohomologia de Weil $H : \mathbf{SmProj}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{GrAlg}_F$ (por exemplo, singular, étale, ℓ-adic, de Rham, etc.), qual é a relação entre $H(\mathbb{P}^n)$ e os $H(\mathbb{A}^k)$?
Por exemplo, se escolhermos cohomologia de de Rham algébrica, temos

$$H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^n) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } i = 0; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad H^i_{\mathrm{dR}}(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } i < 2n \text{ par}; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou para cohomologia ℓ-adic, por exemplo, temos $H^i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell(-\frac{i}{2})$ quando $i \leq 2n$ é par e zero caso contrário.

Cohomologia de $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{P}^n$

Por que parece que tanto a cohomologia de de Rham quanto a cohomologia ℓ-adic de $\mathbb{P}^n$ são feitas de "pedaços" das cohomologias dos $\mathbb{A}^k$?
Uma possível explicação: a sequência longa de Gysin. Dada uma subvariedade $Z \subset X$, temos uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H^j(X \setminus Z) \longrightarrow H^j(X) \longrightarrow H^j(Z) \longrightarrow H^{j+1}(X \setminus Z) \longrightarrow \cdots$$

que vale para H de Rham, étale e, consequentemente, ℓ-adic.

Fibrados projetivos

Seja agora $p : Y \longrightarrow X$ um fibrado projetivo com fibras isomorfas a $\mathbb{P}^n$. Então observamos o isomorfismo

$$H(Y) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} H^{*-2i}(X)(-i)$$

para todas as teorias de cohomologia de Weil. Como anteriormente, se pensarmos em Y como uma familia de espaços projetivos parametrizada por X, então a cohomologia de Y é completamente determinada pela cohomologia de X.

O caso do blow up

Agora vamos olhar para uma variedade X e uma subvariedade $Z \subset X$ suave. Seja $Y = \mathrm{Bl}_Z X$ o blow up de X ao longo de Z, com $\pi : Y \longrightarrow X$ o mapa birracional que contrai o divisor excepcional $E \subset Y$.
Dadas as constatações dos slides anteriores, podemos esperar alguma relação entre $H(Y)$ e $H(X)$, já que

- $X = Z \sqcup (X \setminus Z)$;
- $Y = E \sqcup (Y \setminus E)$;
- $\pi|_E : E \longrightarrow Z$ é um fibrado projetivo;
- $\pi|_{Y \setminus E} : Y \setminus E \longrightarrow X \setminus Z$ é um isomorfismo.

A cohomologia do blow up

A partir das nossas observações, a partição $Y = E \sqcup (Y \setminus E)$ sugere que $H(Y)$ é igual a alguma combinação de $H(E)$ e de $H(X \setminus Z)$, com possíveis twists. Além disso, como E é um fibrado projetivo sobre Z, $H(E)$ se escreve em termos de $H(Z)$. Então, a expectativa é que $H(Y)$ possa ser escrito apenas em termos de $H(X \setminus Z)$ e $H(Z)$, ou ainda em termos de $H(X)$ e $H(Z)$.
De fato, podemos observar que para toda teoria de cohomologia de Weil H, vale

$$H(Y) = H(X) \bigoplus_{i=1}^{m-1} H^{*-2i}(Z),$$

em que m é a codimensão de Z em X.

Topics

As decomposições das estruturas de Hodge

Curiosamente, ao olharmos para os exemplos anteriores, vemos que não são apenas os grupos de cohomologia que apresentam esse comportamento. Algumas estruturas a mais nos anéis de cohomologia também apresentam esse fenômeno.
Considere a cohomologia de de Rham de $\mathbb{P}^n$. Anteriormente sugerimos que $H_{\mathrm{dR}}(\mathbb{P}^n)$ parece ser obtido através dos anéis $H_{\mathrm{dR}}(\mathbb{A}^k)$. Existe um jeito mais refinado de dizer isso.

$$H^{p,q}_{dR}(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{k=1}^{n} H_{\mathrm{dR}}^{p-k,q-k}(\mathbb{A}^1) = \bigoplus_{k=1}^{n} H_{\mathrm{dR}}^{p,q}(\mathbb{A}^1)(-k).$$

Um passo além: ações de Galois

Dada uma variedade suave projetiva X, o que é a estrutura de Hodge em $H^n(X)$ se não uma representação do grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$?
De forma similar, temos grupos de Galois naturais para outras teorias de cohomologia de Weil. Por exemplo, para cohomologia l-adic, temos representações de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$.
Será que podemos sistematizar o estudo das relações entre cohomologias de Weil e esses diversos tipos de decomposição de variedades?

Topics

O que procuramos?

Baseado no comportamento observado das várias teorias de cohomologia de Weil, e principalmente no fato de que esse comportamento é comum a todas elas, Grothendieck concebeu a ideia de *motivo*.

Procuramos uma categoria $\mathbf{Mot}(k)$ de motivos que satisfaça as seguintes condições:

- Existe um funtor $h : \mathbf{SmProj}(k) \longrightarrow \mathbf{Mot}(k)$ pelo qual todas as teorias de cohomologia de Weil se fatoram;
- $\mathbf{Mot}(k)$ é simétrica monoidal, abeliana e semisimples (na verdade Tannakiana).

Explicando o comportamento das cohomologias

Com essa ideia de motivos, podemos explicar vários dos comportamentos que observamos anteriormente:

1. $$h(\mathbb{P}^n) = \mathbb{L}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{L} \oplus \mathbf{1};$$
2. para um fibrado projetivo $Y \longrightarrow X$, temos a fórmula
$$h(Y) = \bigoplus_{i=0}^{m} h(X)(-i);$$
3. para um blow up, temos a relação
$$h(Y) = h(X) \bigoplus_{i=1}^{m} h(Z)(-i).$$

Referências

- Murre, J.; Nagel, J.; Peters, C. *Lectures on the theory of pure motives*. Volume 61. American Mathematical Society.
- Riou, J. *Realization functors*. Available at https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ joel.riou/doc/realizations.pdf.
- Voisin, C. *The Hodge Conjecture*. Available at https://webusers.imj-prg.fr/ claire.voisin/Articlesweb/voisinhodge.pdf.