

# O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT E INVARIANTES DE DEHN

---

*X Bienal de Matemática*

---

SÉRGIO MACIEL

JUNHO DE 2022

*Ao Prof. Vinicius Morelli Cortes, que cedeu uma tarde inteira a fins de  
revisar o texto.*

# SUMÁRIO

<b>Prefácio</b>	<b>v</b>
<b>1 Congruência por Tesoura e o Terceiro Problema de Hilbert</b>	<b>1</b>
1.1 Dissecções de Poliedros e Congruência por Tesoura . . . . .	1
1.2 Dissecções por planos . . . . .	2
<b>2 Invariantes de Dehn</b>	<b>5</b>
2.1 Invariantes de Dehn e Congruência por Tesoura . . . . .	5
2.2 Usando o Invariante de Dehn para Resolver o Terceiro Problema de Hilbert . . . . .	8
<b>3 Além do Terceiro Problema de Hilbert</b>	<b>11</b>
3.1 Generalizações do problema e relações com outras áreas da ma- temática . . . . .	11
<b>Apêndices</b>	
<b>A <math>\arccos(1/3)</math> não é múltiplo racional de <math>\pi</math></b>	<b>15</b>
<b>Referências</b>	<b>17</b>



# PREFÁCIO

Durante o *Congresso Internacional de Matemáticos* de 1900, em Paris, David Hilbert apresentou uma lista contendo 23 problemas que ele considerava as questões em aberto mais importantes para a matemática na época. Um dos poucos problemas da lista que hoje estão solucionados é o terceiro. *O Terceiro Problema de Hilbert*, que trata de algumas características de poliedros, pode ser enunciado da seguinte forma.

*Conjectura 0.1.* Dados quaisquer dois poliedros de mesmo volume, é sempre possível dividir o primeiro deles em poliedros menores e rearranjar os pedaços para formar o segundo poliedro.

A pergunta análoga para duas dimensões já tinha uma resposta conhecida. Sabia-se que se dois polígonos têm a mesma área, é possível dividir um deles em polígonos menores e rearranjá-los para formar o outro polígono. Não apenas isso, mas o *Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien* (como ficou conhecido o resultado) nos dá um algoritmo para fazê-lo. Com um resultado tão forte para duas dimensões, é natural que procuremos uma resposta para o caso tridimensional.

Em 1902, apenas dois anos depois que Hilbert apresenta sua lista de problemas, Max Dehn, seu antigo aluno, apresenta uma resposta para a pergunta levantada. Ele introduz uma maneira de associar certas quantidades à poliedros. Em particular, cada poliedro está relacionado à um grupo abeliano, denominado o *Invariante de Dehn* desse poliedro. Definiremos o Invariante de Dehn de um poliedro no primeiro capítulo, junto com algumas outras definições que nos permitirão dar um tratamento um pouco mais rigoroso ao problema em questão.

No Segundo Capítulo, trataremos de mostrar que o Invariante de Dehn é

de fato um invariante, posto que essa quantidade coincide para dois poliedros que admitem a decomposição descrita pelo enunciado do Terceiro Problema de Hilbert. Ainda nesse capítulo, calcularemos o Invariante de Dehn de dois poliedros de mesmo volume e usaremos os resultados para obtermos uma resposta negativo ao Terceiro Problema de Hilbert.

Finalmente, no terceiro capítulo, exploraremos algumas generalizações do Terceiro Problema de Hilbert. Em especial, sua versão para o  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  e  $\mathbb{H}^n$ , onde podemos encontrar algumas perguntas em aberto. Neste mesmo capítulo, destacaremos algumas relações surpreendentes entre a teoria desenvolvida para lidar com o Terceiro Problema de Hilbert Generalizado e outras áreas da matemática, em particular, Teorias de Homologia, Tesselacões e K-Teoria.

BELÉM, JUNHO de 2022

Sérgio Henrique Maciel

---

# CONGRUÊNCIA POR TESOURA E O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

## 1.1. DISSECÇÕES DE POLIEDROS E CONGRUÊNCIA POR TESOURA

A pergunta levantada por Hilbert, na forma como enunciamos anteriormente, apesar de ser compreensível, deixa a desejar em precisão matemática. As noções de dividir um poliedro em poliedros menores e reorganizar esses pedaços necessitam de um tratamento um pouco mais rigoroso para que possamos trabalhar matematicamente com essas ideias. Perante essa necessidade, definiremos a seguir alguns conceitos que vão nos permitir enunciar novamente o Terceiro Problema de Hilbert, de forma muito mais precisa e já introduzindo termos que agilizarão o estudo do problema.

A primeira noção que trataremos será a de uma *dissecção de um poliedro*, que representará a ideia de dividir um poliedro em poliedros menores.

**Definição 1.1.** Uma *dissecção* de um poliedro  $P$  é uma coleção finita  $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  de conjuntos satisfazendo

- $P_1, P_2, \dots, P_n$  são todos poliedros;
- $\cup_{i=1}^n P_i = P$ ;
- Os conjuntos de  $M_P$  têm interiores disjuntos dois a dois.

A primeira condição impõe que os conjuntos da dissecção sejam de fato poliedros, refletindo a ideia de dividir o poliedro  $P$  em subpoliedros. A segunda

propriedade nos diz que de fato esses subpoliedros  $P_1, P_2, \dots, P_n$  estão contidos em  $P$  e não são poliedros quaisquer. Enquanto isso, o terceiro item nos diz que dois poliedros da disseção não se intersectam a menos de vértices, arestas ou faces, não "entrando" um no outro. Isto é, os poliedros de  $M$  de fato dividem  $P$ , no sentido de que eles se encaixam de forma a cobrir todo o poliedro  $P$ , sem falta e sem excesso. Com esta definição em mãos, podemos dar um sentido mais preciso também à ideia de rearranjar os pedaços de um poliedro para formar um outro conjunto.

**Definição 1.2.** Sejam  $P$  e  $Q$  dois poliedros. Dizemos que  $P$  e  $Q$  são *congruentes por tesoura* se existem disseções  $M_P$  e  $M_Q$  de  $P$  e  $Q$ , respectivamente, e uma bijeção  $\rho : M_P \rightarrow M_Q$  tal que para todo  $L \in M_P$ ,  $L$  é isométrico a  $\rho(L)$ .

Essencialmente, o que essa definição descreve é a existência de uma forma de dividirmos o poliedro  $P$  em poliedros menores (uma disseção) e após aplicar uma isometria em cada poliedro, isto é, trasladá-los e rotacioná-los, cada poliedro está agora na posição e orientação de algum poliedro da disseção de  $Q$ . Isso descreve de forma precisa nossa intuição sobre o Terceiro Problema de Hilbert.

## 1.2. DISSECCÕES POR PLANOS

Imediatamente, podemos perceber que existem diversas disseções possíveis para um mesmo poliedro. Em busca de entender melhor como as disseções se relacionam com propriedades básicas dos poliedros, voltamos nossa atenção para uma forma simples de criarmos disseções de um poliedro. Procuraremos alguns padrões observáveis ao dividirmos um poliedro em dois através de um plano. Um plano que passa por um poliedro intersecta algumas das suas arestas, sendo que essa intersecção pode ocorrer de duas formas diferentes, isto é, com o plano e a aresta em duas posições relativas diferentes. Podemos ver as duas situações diferentes abaixo, na Figura 1.

À esquerda, podemos ver a primeira possibilidade, em que a aresta que chamaremos de  $A$  está contida no plano  $\pi$ . Neste caso, notamos que o poliedro pelo qual o plano passa, que denotaremos por  $P$ , é dividido em dois poliedros

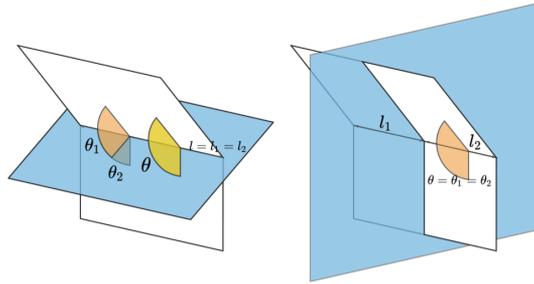


Figura 1.1: Possíveis posições de planos e arestas

$P_1, P_2$ , de forma que cada um compartilha de uma cópia da aresta  $A$ . Em especial, se  $A$  tem comprimento  $l$ , tanto  $P_1$  quanto  $P_2$  terão uma aresta de comprimento  $l$ . Isso já não acontece com o ângulo diedral de  $A$ , denotado por  $\theta$ , que é ângulo determinado pelas faces que definem  $A$ . Ao contrário do comprimento de  $A$  que, em certo sentido, é preservado durante a divisão,  $\theta$  é separado em dois fatores  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , cada um sendo ângulo diedral de diferentes cópias de  $A$  que pertencem à  $P_1$  e  $P_2$ .

Note que o plano  $\pi$  passa a ser face de  $P_1$  e de  $P_2$ , e o ângulo diedral de  $A$  em  $P_i$  é simplesmente o ângulo determinado por  $\pi$  e a face de  $P_i$  que contém  $A$ , a qual chamaremos de  $\theta_i$ . Embora os ângulos não são herdados por  $P_1$  e  $P_2$ , vale  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , então de certa forma até mesmo informação sobre os ângulos diedrais são transmitidas nesse forma de dissecar poliedros.

Por outro lado, no segundo caso, em que o plano  $\pi$  atravessa a aresta  $A$  de forma transversal, temos a aresta sendo dividida em dois segmentos  $A_1$  e  $A_2$ , arestas de  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. De fato, em contraste com o caso anterior, o ângulo diedral é conservado e repassado para  $A_1$  e  $A_2$ , ou seja,  $A_i$ , aresta em  $P_i$  tem ângulo diedral igual a  $\theta$ . Analogamente à situação anteriormente analisada, os comprimentos de  $A_1$  e  $A_2$ , denotados por  $l_1$  e  $l_2$ , são tais que  $l = l_1 + l_2$ .

Podemos notar certo padrão nas informações sobre comprimentos e ângulos no poliedro antes e após a divisão por esse método utilizando um plano. De fato, escrevemos sugestivamente os comprimentos das arestas  $A, A_1$  e  $A_2$  e seus ângulos diedrais em pares de forma a evidenciar uma estrutura algébrica

que sugere fortemente uma bilinearidade. No primeiro caso, temos  $(l, \theta) = (l, \theta_1 + \theta_2) = (l, \theta_1) + (l, \theta_2) = (l_1, \theta_1) + (l_2, \theta_2)$ , enquanto no segundo caso, ficamos com  $(l, \theta) = (l_1 + l_2, \theta) = (l_1, \theta) + (l_2, \theta) = (l_1, \theta_1) + (l_2, \theta_2)$ . É com base nessa análise de um caso mais simples que encontraremos a motivação para definir o Invariante de Dehn como um produto tensorial entre módulos sobre  $\mathbb{Z}$ , de modo a manter uma bilinearidade natural.

---

# INVARIANTES DE DEHN

## 2.1. INVARIANTES DE DEHN E CONGRUÊNCIA POR TE-SOURA

Como já comentado anteriormente, a estrutura de bilinearidade parece estar presente de alguma forma na preservação, sob dissecções, dos comprimentos de arestas e ângulos diedrais de um poliedro. É nos baseando nessas observações que vamos trazer a seguinte definição.

**Definição 2.1.** Sejam  $P$  um poliedro de arestas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $l_i$  o comprimento de  $A_i$  e  $\theta_i$  seu ângulo diedral. Então definimos o *Invariante de Dehn* de  $P$  como um elemento  $D(P)$  do grupo abeliano  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$  dado pelo somatório

$$D(P) = \sum_{i=1}^n l_i \otimes \theta_i.$$

Dessa forma, a bilinearidade observada anteriormente aparece de forma natural. Note que cada elemento do somatório que define  $D(P)$  é um tensor em  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$ , o que se reforça no momento em que passamos a encarar  $\mathbb{R}$  (visto como um  $\mathbb{Z}$ -módulo) no produto tensorial como um representante dos comprimentos de arestas possíveis de poliedros, enquanto  $\mathbb{R} / \pi\mathbb{Z}$  (também como  $\mathbb{Z}$ -módulo) está relacionado aos ângulos diedrais possíveis, identificando ângulos que diferem por meia volta. Essa identificação é arbitrária e poderíamos escolher o módulo  $\mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$  ou mesmo  $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ . Nossa escolha atual se justifica por simplificações em algumas contas na seção seguinte. Definido o Invariante de

Dehn, resta mostrar que ele merece esse nome, que de fato ele é um invariante à congruência por tesoura.

**Lema 2.2.** *Sejam  $P$  um poliedro e  $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  uma de suas dissecções. Então vale  $D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n)$ .*

*Demonstração.* Começamos por notar que as arestas de poliedros de  $M_P$  podem ser classificadas em três tipos levando em conta suas posições em  $P$ .

1. Arestas contidas em arestas de  $P$ ;
2. Arestas contidas, a menos de possivelmente suas extremidades, no interior de uma face de  $P$ ;
3. Arestas contidas, a menos de possivelmente suas extremidades, no interior de  $P$ .

Como cada aresta de qualquer poliedro de  $M_P$  se encaixa em exatamente uma das classificações acima, podemos reorganizar a soma  $D(P_1) + D(P_2) + \dots + D(P_n)$  como uma soma de três termos  $S_1 + S_2 + S_3$ , em que  $S_i$  corresponde à soma dos tensores das arestas do Tipo  $i$ .

Podemos calcular cada soma individualmente. Vamos começar pelas arestas do Tipo 3 pois ela apresenta um argumento mais geral que pode ser adaptado para os outros dois tipos. Considere uma aresta  $A$  do Tipo 3 de algum poliedro de  $M_P$ . Tome o conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  de arestas de poliedros de  $M_P$  que sejam colineares a  $A$  e denote por  $p_1, p_2, \dots, p_m$  os pontos que são extremidades de alguma aresta  $A_i$ , ordenados de forma crescente pela distância a uma das extremidades de  $\cup_{i=1}^k A_i$ . Note que esses pontos determinam uma partição de  $\cup_{i=1}^k A_i$ . Em particular, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , existe um subconjunto de  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  que determina uma partição de  $A_i$ .

Chamando de  $s_j$  tanto o segmento cujas extremidades são  $p_j$  e  $p_{j+1}$  quanto o próprio comprimento desse segmento (com um abuso de notação), se  $s_j \subset \cup_{i=1}^k A_i$ , então  $s_j$  está contido em pelo menos um  $A_i$  e temos um tensor  $s_j \otimes \theta_i$  associado a  $s_j$ , em que  $\theta_i$  é o ângulo diedral de  $A_i$ , como aresta de algum poliedro de  $M_P$ . Mas como  $M_P$  é uma dissecção de  $P$ , todo ponto de  $P$  está

contido em algum poliedro da dissecção. Assim, cada  $s_j$  está contido em mais de um poliedro de  $M_P$ . Mais detalhadamente, como cada  $s_j$  contém algum ponto interior de  $P$ , existe um subconjunto de  $M_P$  com poliedros de forma que cada poliedro possui alguma aresta contendo  $s_j$  e a soma dos ângulos diedrais dessas arestas é  $2\pi$ .

Esse argumento mostra que para cada aresta  $A$  do Tipo 3, a soma dos tensores associados às arestas de poliedros de  $M_P$  que são colineares com  $A$  (que também são do Tipo 3) será nula. Conseqüentemente,  $S_3$ , a soma associada a arestas do Tipo 3 será 0. Perceba também que só usamos o fato de que as arestas consideradas eram do Tipo 3 no fim da argumentação, para concluir que a soma dos ângulos é  $2\pi$ .

Vamos replicar o argumento, com adaptações, para calcular  $S_2$ , a soma dos tensores das arestas do Tipo 2. Cada segmento  $s_j$  em uma face de  $P$  admite um conjunto de poliedros que possuem alguma aresta que contém  $s_j$ . Como  $s_j$  está no interior de uma face de  $P$ , a menos de suas extremidades, os ângulos diedrais das arestas desses poliedros somam  $\pi$  que é identificado com 0 em  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ . Isso significa que  $S_2 = 0$ .

O mesmo argumento se aplica para arestas do Tipo I, exceto que, neste caso, a soma será o próprio ângulo diedral da aresta de  $P$  que contém  $s_j$ . Dado que  $A_P = \cup_{i=1}^k A_i$  é aresta de  $P$ ,  $\theta$  é seu ângulo diedral e  $l$  é seu comprimento, temos

$$s_j \otimes \theta_{i_1} + s_j \otimes \theta_{i_2} + \dots + s_j \otimes \theta_{i_t} = s_j \otimes \theta,$$

com  $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_t}$  os ângulos diedrais de  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}$ , as arestas dos poliedros de  $M_P$  tais que  $s_j \subset A_{i_r}$ . Ao somar ao longo de  $j$ , como  $\cup_{j=1}^{m-1} s_j = A_P$ , teremos  $\sum_{j=1}^{m-1} s_j \otimes \theta = l \otimes \theta$ , que é o tensor associado a uma aresta de  $P$ .

Ao considerar essa mesma construção para todas as arestas do Tipo 1, teremos a soma de todos os tensores associados a arestas de  $P$ , o que é o próprio Invariante de Dehn de  $P$ . Ficamos com

$$D(P_1) + D(P_2) + \dots D(P_n) = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 = D(P),$$

como queríamos mostrar. □

Seguimos mostrando o resultado principal.

**Teorema 2.3.** *Se  $P$  e  $Q$  são Congruentes por Tesoura, então  $D(P) = D(Q)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $M_P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  e  $M_Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  dissecções de  $P$  e  $Q$  e  $\rho : M_P \rightarrow M_Q$  uma bijeção com a propriedade de que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\rho(P_i)$  é isométrico a  $P_i$ . Como isometrias preservam ângulos e comprimentos,  $D(P_i) = D(\rho(P_i))$ , uma vez que o Invariante de Dehn é definido apenas em termos de distâncias e ângulos. Logo,

$$D(Q) = D(P_1) + \dots + D(P_n) = D(\rho(P_1)) + \dots + D(\rho(P_n)) = D(Q_1) + \dots + D(Q_n) = D(Q)$$

pelo lema anterior. □

## 2.2. USANDO O INVARIANTE DE DEHN PARA RESOLVER O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

Se tomarmos a contrapositiva do Teorema 2.3, então sabemos que se existirem dois poliedros de mesmo volume com Invariantes de Dehn distintos, então eles não são congruentes por tesoura, o que nos daria uma resposta negativa ao terceiro problema de Hilbert. O que faremos agora será calcular o Invariante de Dehn de dois poliedros de volume unitário, a saber, o cubo e o tetraedro regular. Veremos que eles apresentam invariantes de Dehn diferentes e portanto não são congruentes por tesoura.

O Invariante de Dehn do Cubo Unitário é simples de ser calculado. O cubo de volume 1 possui 12 arestas, cada uma de comprimento unitário e ângulo diedral  $\pi/2$ . Então

$$D(\text{Cubo}) = 12 \cdot 1 \otimes \frac{\pi}{2} = 1 \otimes \frac{12\pi}{2} = 1 \otimes 6\pi = 0.$$

Já o Invariante de Dehn do tetraedro regular de volume unitário será um pouco mais trabalhoso.

Primeiramente, o volume do tetraedro regular pode ser calculado, em termos do comprimento de suas arestas, por  $V = \frac{l^3}{6\sqrt{2}}$ . Assim, para que  $V = 1$ ,

é necessário que o lado do tetraedro tenha comprimento  $l = 6^{1/3}2^{1/6}$ . Agora, precisamos do ângulo diedral de cada aresta, que também pode ser calculado com um pouco de geometria, obtendo-se  $\theta = \arccos(1/3)$ . Como o tetraedro regular tem 6 arestas, concluimos que

$$D(\text{Tetraedro}) = 6 \cdot (6^{1/3}2^{1/6}) \otimes \arccos(1/3) = 6^{4/3}2^{1/6} \otimes \arccos(1/3).$$

O grande problema é que não é óbvio se esse tensor é nulo ou não.

Veja que podemos fatorar tensores em  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  por racionais, isto é, para todo  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  e  $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ , vale  $a \otimes b = (\frac{p}{q}) \cdot a \otimes (b\frac{q}{p}) = \frac{ap}{q} \otimes \frac{bq}{p}$ . Isso acontece pois estamos considerando  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}$ -módulos. Logo,  $6^{4/3}2^{1/6} \otimes \arccos(1/3) = 0$  é equivalente a dizer que  $\arccos(1/3) = \frac{p}{q}\pi$ , para algum par de inteiros  $p, q$ , com  $q \neq 0$ . Basta, então, descobrirmos se  $\arccos(1/3)$  é múltiplo racional de  $\pi$ .

É possível provar que  $\arccos(1/3)$  não é múltiplo racional de  $\pi$  (ver Apêndice A). Com este resultado, concluimos que  $D(\text{Tetraedro})$  não é nulo, de modo que o tetraedro regular de volume 1 e o cubo unitário não são congruentes por tesoura. Assim, encontramos dois exemplos que mostram que o Terceiro Problema de Hilbert tem resposta negativa.



---

# ALÉM DO TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

## 3.1. GENERALIZAÇÕES DO PROBLEMA E RELAÇÕES COM OUTRAS ÁREAS DA MATEMÁTICA

O Teorema 2.3 nos diz que o Invariante de Dehn age como um indicador necessário para que dois poliedros sejam congruentes por tesoura. Mais além, em 1966, SYDLER mostra que o Invariante de Dehn e o Volume de um poliedro formam um conjunto completo de invariantes para a congruência por tesoura, isto é, vale o seguinte teorema.

**Teorema 3.1** (Sydler-Dehn). *Dois poliedros  $P$  e  $Q$  são congruentes por tesoura se, e somente se,  $D(P) = D(Q)$  e  $Vol(P) = Vol(Q)$ .*

Através dos Invariantes de Dehn, podemos resolver o Terceiro Problema de Hilbert em sua forma clássica. Assim como o próprio terceiro problema de Hilbert é o análogo do caso bidimensional, podemos investigar o problema análogo em dimensão  $n \geq 4$ , procurando as condições necessárias para que dois  $n$ -polítopos de mesmo  $n$ -volume sejam congruentes por tesoura (munidos das definições apropriadas de dissecação e congruência por tesoura).

DUPONT e SAH consideram o grupo livre gerado por polítopos isométricos e mostram que existem sequências exatas de morfismos entre certas homologias de subgrupos do grupo de isometrias de  $\mathbb{R}^n$ , grupos de polítopos e o produto tensorial no qual é definido o Invariante de Dehn. A grande novidade vem quando eles provam que a trivialidade de um dos grupos da sequência implica

o *Teorema Generalizado de Dehn-Sydler*: o morfismo  $D : P(\mathbb{R}^n)/\mathcal{L}_\epsilon \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  que associa a cada classe de poliedros gerados por prismas seu Invariante de Dehn é um monomorfismo.

Com essa reinterpretação do Invariante de Dehn e com o auxílio de ferramentas homológicas, DUPONT e SAH ainda conseguem generalizar o Teorema de Dehn-Sydler para  $\mathbb{H}^2$  e  $S^2$ , os espaços hiperbólicos e esféricos, respectivamente. No caso de  $\mathbb{H}^3$  e  $S^3$ , DUPONT e SAH provaram também que se dois poliedros são congruentes por tesoura, então seus Invariantes de Dehn (ou suas coleções de Invariantes de Dehn generalizados, algumas vezes chamados na literatura de *Invariantes de Hadwiger*) coincidem.

Ainda é um problema em aberto determinar se a recíproca vale, isto é, se dois poliedros em  $\mathbb{H}^3$  e  $S^3$  com o mesmo Invariante de Dehn necessariamente são congruentes por tesoura. Esse problema é de notável interesse pois nos permite concluir se o Invariante de Dehn caracteriza cada classe de equivalência na congruência por tesoura, ou seja, se ele é uma ferramenta de classificação dessas classes.

Convém notar também a relação da teoria desenvolvida sobre o Terceiro Problema de Hilbert com a K-Teoria. Em particular, existem sequências exatas curtas relacionando certas K-Teorias com poliedros em  $\mathbb{H}^3$ . Além disso, cada classe de poliedros isométricos (tanto em  $\mathbb{R}^n$  quanto em  $S^n$  ou  $\mathbb{H}^n$ ) pode ser visto como uma K-Teoria de uma certa categoria.

Outra aparição dos Invariantes de Dehn que merece ser citada é em um teorema de DEBRUNNER de 1980 que afirma que qualquer poliedro que tessela o espaço periodicamente (em uma tesselação que só contém ele mesmo) necessariamente tem Invariante de Dehn nulo. Mais tarde, em 1995, LAGARIAS e MOEWS estendem o resultado para  $\mathbb{R}^n$ . Note que essencialmente, o que o teorema diz é que todo poliedro que tessela  $\mathbb{R}^n$  é congruente por tesoura a um  $n$ -cubo.

# APÊNDICES



---

## arccos(1/3) NÃO É MULTIPLO RACIONAL DE $\pi$

Seja  $x = \arccos(1/3)$ , então  $\cos x = \frac{1}{3}$ . Suponha que  $x = \frac{p}{q}\pi$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$  de modo que  $\cos(qx) = \cos(p\pi) = \pm 1$ . Podemos usar os *Polinômios de Chebyshev* para obter expressões gerais de  $\cos(nx)$ . Especificamente,

$$\pm 1 = \cos(qx) = T_q(\cos x). \tag{A.1}$$

Agora utilizamos o fato de que o coeficiente do termo de maior grau de  $T_q$  é  $2^{q-1}$ . Então A.1 se torna  $\pm 1 = T_q(\cos x) = 2^{q-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q + P\left(\frac{1}{3}\right)$ , em que  $P$  é algum polinômio de grau menor que  $q - 1$ . Ao multiplicarmos ambos os lados por  $3^q$ , temos  $\pm 3^q = 2^{q-1} + 3^q \cdot P(1/3)$ . Reduzindo essa igualdade mod 3, teremos  $0 = 2^{q-1} \pmod{3}$ , um absurdo. Logo, não existem inteiros  $p, q$  tais que  $\arccos(1/3) = \frac{p}{q}\pi$ .



# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DUPONT, J. L. (1982). *Algebra of Polytopes and Homology of Flag Complexes*. Osaka Journal of Mathematics.
- [2] DUPONT, J. L. e SAH, C. H. (1990). *Homology of Euclidean groups of motion made discrete and Euclidean scissors congruence*. Acta Mathematica.
- [3] SAH, C. H. (1979). *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence*. Pitman Advanced Publishing Program
- [4] LAGARIAS, J. C., MOEWSS, D. (1995). *Polytopes that Fill  $\mathbb{R}^n$  and Scissors Congruence*. Discrete Computational Geometry.
- [5] SYDLER, J. P. (1965). *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*. Commentarii Mathematici Helvetici.
- [6] ZAKHAREVICH, I. (2012). *Scissors Congruence as K-Theory*. Homology, Homotopy and Applications.

